Soluție

1.a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot B \neq B \cdot A$.

b) Prin calcul direct.

c) Notăm $C = A \cdot B$. $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ apoi prin inducție completă se arată că $C^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ deci răspunsul este negativ.

2a) $X^3 - 2 \cdot X - 1 = (X + 1) \cdot P$.

b) $Q_3 = X^3 - 2 \cdot X - 1$ are trei rădăcini reale : $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Prin inducție completă după n .Pentru $n = 2$, $Q_2 = P \vdots P$. Presupunem afirmația adevărată pentru n și o demonsrăm pentru $n + 1$. $Q_{n+1} = X^{n+1} - F_{n+1} \cdot X - F_n = X \cdot \left(X^n - F_n \cdot X - F_{n-1} \right) + F_n \cdot \left(X^2 - X - 1 \right)$, de unde rezultă afirmația .